FORMULAIRE

I)Equations fondamentales de la magnétohydrostatique :

1)Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{v}) = 0$$

2)Equations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Dans le cadre de la magnétohydrostatique, on utilise l'approximation des états quasistationnaires : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j}$ (Loi d'Ampère)

donc $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$ et, en tenant compte de la neutralité, $\rho_{charge} = 0$

On écrit aussi la première équation en utilisant la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times (\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\sigma}\vec{\nabla} \times \vec{j} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu\sigma}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \eta\Delta\vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

où $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ est la diffusivité magnétique

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta\Delta\vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

3)Equation du mouvement :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F_g} + \vec{F_v} \text{ où } \vec{F_v} = \rho\vec{v}(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v})) \text{ et } \vec{F_g} = -\rho\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{\nabla}B^2 = 2\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + 2(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{j} = -\frac{1}{\mu}\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2\mu}\vec{\nabla}B^2 + \frac{1}{\mu}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\rho\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(P + \frac{B^2}{2\mu}) - \rho\vec{\nabla}\Phi + (\frac{\vec{B}}{\mu}.\vec{\nabla})\vec{B} + \eta_V(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}))$$

4)Thermodynamique :

Système : petite masse $\delta m = \rho \delta V$ $d(\delta H) = Td(\delta S)$, $\delta H = h\delta m$ et $\delta S = s\delta m$

donc $T\frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt}$

$$-L = \rho\frac{dh}{dt} = \rho T\frac{ds}{dt}$$

$d(\delta H) = d(\delta E) + Pd(\delta V)$ donc $dh = de + Pd(\frac{1}{\rho})$ avec $\delta E = e\delta m$

$$L = -\rho(\frac{de}{dt} + P\frac{d(\frac{1}{\rho})}{dt}) = -\rho\frac{de}{dt} + \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Gaz parfait : $P = \frac{\rho}{m}k_BT$ et $e = c_vT$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ et $c_p = c_v + \frac{k_B}{m}$

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{k_B}{m} \text{ et } c_v = \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m} \ ; \ e = c_vT = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$$

$$\frac{L}{\rho^\gamma} = (\frac{P}{\rho})\frac{1}{\rho^\gamma}\frac{d\rho}{dt} - \rho^{\gamma-1}\frac{de}{dt} = (\frac{P}{\rho})\frac{1}{\rho^\gamma}\frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{(\gamma-1)\rho^{\gamma-1}}d(\frac{P}{\rho})$$

$$\frac{L}{\rho^\gamma} = \frac{1}{1-\gamma}[\frac{P}{\rho}(-\gamma+1)\rho^{-\gamma}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}d(\frac{P}{\rho})] = \frac{1}{1-\gamma}[\frac{P}{\rho}\frac{d\rho^{-\gamma+1}}{dt} + \rho^{-\gamma+1}d(\frac{P}{\rho})] = -\frac{1}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(\frac{P}{\rho^\gamma})$$

$$-L = \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dt}(\frac{P}{\rho^\gamma}) = \frac{P}{\gamma-1}(\frac{P}{\rho^\gamma})^{-1}\frac{d}{dt}(\frac{P}{\rho^\gamma}) = \frac{P}{\gamma-1}\frac{d}{dt}ln(\frac{P}{\rho^\gamma}) \text{ avec } -L = Q^+ - Q^-$$

$$\frac{P}{\gamma-1}\frac{d}{dt}ln(P\rho^{-\gamma}) = Q^+ - Q^- = \rho T\frac{ds}{dt}$$

5)Conservation de l'énergie :

densité d'énergie : $E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{P}{\gamma-1} + \rho\Phi + \frac{B^2}{2\mu}$

flux d'énergie : $\vec{F_\epsilon} = \vec{v}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{\gamma P}{\gamma-1} + \rho\Phi) + \frac{\vec{B}}{\mu} \times (\vec{v} \times \vec{B})$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{F_\epsilon} = Q^+ - Q^-$$

6)Conservation de l'énergie : changement de variable :

On pose : $\vec{u} = \vec{v} - R\Omega(R)\vec{e_\phi}$

$$\frac{\partial E_u}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{F_{E_u}} = -(\rho u_R u_\phi - \frac{B_R B_\phi}{\mu})\frac{d\Omega}{dR} - Q^-$$

où la densité d'énergie s'écrit : $E_u = \frac{1}{2}\rho(u^2 + \Phi_{eff}) + \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu}$

(avec $\Phi_{eff} = \Phi - \int^R R\Omega^2 dR$)

et le flux d'énergie : $\vec{F_{E_u}} = \vec{u}(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\gamma P}{\gamma - 1} + \rho\Phi_{eff}) + \frac{\vec{B}}{\mu} \times (\vec{u} \times \vec{B})$

Je n'ai pas réussi à redémontrer ce résultat mais il ne m'a pas resservi par la suite.

II)Perturbation de l'équilibre :

Le champ de vitesse du disque de gaz à l'équilibre a pour forme : $\vec{v} = R\Omega(R)\vec{e_\phi}$

et la perturbation : $\delta X = \delta X(R,Z)exp(im\phi - i\omega t)$

1)Equation de conservation de la masse :

Pour le système à l'équilibre : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0$

Pour le système perturbé : $\dfrac{\partial(\rho+\delta\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla}.((\rho+\delta\rho)(\vec{v}+\vec{\delta v})) = 0$

La différence des deux : $\dfrac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) + \vec{\nabla}.\delta\rho\vec{v} = 0$

$-i\omega\delta\rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) + \vec{\nabla}.(\delta\rho\vec{v}) = 0$

$\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{\nabla}.(R\Omega(R)\vec{e}_\phi) = 0$ donc :

$-i\omega\delta\rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) + \vec{v}.\vec{\nabla}\delta\rho = 0$

$\vec{\nabla}\delta\rho = \dfrac{\partial\delta\rho}{\partial R}\vec{e_R} + \dfrac{im}{R}\delta\rho\vec{e_\phi} + \dfrac{\partial\delta\rho}{\partial Z}\vec{e_Z}$ d'où :

$-i\omega\delta\rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) + im\Omega(R)\delta\rho = 0$

Or $\varpi = \omega - m\Omega$ donc :

$-i\varpi\delta\rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) = 0$

2)Equation du mouvement :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}(P + \frac{B^2}{2\mu}) - \vec{\nabla}\Phi + (\frac{\vec{B}}{\mu\rho}.\vec{\nabla})\vec{B} + \frac{\eta_V}{\rho}(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}))$$

On perturbe l'équation au premier ordre :

$$\frac{\partial\vec{\delta v}}{\partial t} + (\vec{\delta v}.\vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{\delta v} = \frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}(P + \frac{B^2}{2\mu}) + \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}(\delta P + \frac{\vec{B}\delta\vec{B}}{\mu}) - \vec{\nabla}\delta\Phi$$

$$+\delta(\frac{\vec{B}}{\mu\rho}.\vec{\nabla})\vec{B} + \delta\frac{\eta_V}{\rho}(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}))$$

$$-i\omega\vec{\delta v} + \delta v_R\frac{d(R\Omega(R))}{dR}\vec{e_\phi} - \delta v_\phi\Omega(R)\vec{e_R} + im\Omega(R)\vec{\delta v} + \frac{R\Omega\delta v_\phi}{R}\frac{\partial\vec{e_\phi}}{\partial\phi} + \frac{R\Omega\delta v_R}{R}\frac{\partial\vec{e_R}}{\partial\phi} =$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}(P + \frac{B^2}{2\mu}) + \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}(\delta P + \frac{\vec{B}\delta\vec{B}}{\mu}) - \vec{\nabla}\delta\Phi + \delta(\frac{\vec{B}}{\mu\rho}.\vec{\nabla})\vec{B} + \delta\frac{\eta_V}{\rho}(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}))$$

On utilise l'équation du gaz polytropique $P = A\rho^\gamma$ donc $\dfrac{\delta P}{P} = \gamma\dfrac{\delta\rho}{\rho}$

$$\vec{\nabla}\frac{\delta P}{\rho} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta P + \delta P\vec{\nabla}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta P + \delta P\vec{\nabla}\frac{A^{\frac{1}{\gamma}}}{P^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta P - \frac{A^{\frac{1}{\gamma}}\delta P}{\gamma P^{\frac{1}{\gamma}+1}}\vec{\nabla}P = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta P - \frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}P$$

En posant $H = \frac{\delta P}{\rho}$, on a : $-i\varpi\delta\vec{v} + \delta v_R \frac{d(R\Omega(R))}{dR}\vec{e_\phi} - \delta v_\phi \Omega \vec{e_R} - \Omega\delta v_\phi \vec{e_R} + \Omega\delta v_R \vec{e_\phi} =$

$-\vec{\nabla}H + \frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}\frac{B^2}{2\mu} + \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}\frac{\vec{B}\delta\vec{B}}{\mu} - \vec{\nabla}\delta\Phi + \delta(\frac{\vec{B}}{\mu\rho}.\vec{\nabla})\vec{B} + \delta\frac{\eta_V}{\rho}(\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{v}))$

En décomposant le terme de gauche selon les trois coordonnées :

selon R : $-i\varpi\delta v_R - 2\Omega(R)\delta v_\phi$

selon ϕ :

$$-i\varpi\delta v_\phi + \delta v_R(\frac{d(R\Omega(R))}{dR} + \Omega(R)) = -i\varpi\delta v_\phi + \frac{\delta v_R}{R}\frac{d(R^2\Omega(R))}{dR} = -i\varpi\delta v_\phi + \delta v_R\frac{\kappa^2}{2\Omega}$$

selon Z : $-i\varpi\delta v_Z$

On a posé : $\kappa^2 = \frac{2\Omega}{R}\frac{d}{dR}(R^2\Omega)$

A partir de maintenant, on ne prend plus en compte la viscosité et le champ magnétique et on pose : $W = \frac{\delta P}{\varpi\rho} - \frac{\delta\Phi}{\varpi} = \frac{H}{\varpi} - \frac{\delta\Phi}{\varpi}$ d'où :

$-i\varpi\delta v_R - 2\Omega(R)\delta v_\phi = -\frac{\partial(\varpi W)}{\partial R}$

$-i\varpi\delta v_\phi + \delta v_R\frac{\kappa^2}{2\Omega} = -\frac{im}{R}\varpi W$

$-i\varpi\delta v_Z = -\varpi\frac{\partial W}{\partial Z}$

$\varpi = \omega - m\Omega$ et $D = \kappa^2 - \varpi^2$

En inversant, on obtient :

$\delta v_R = \frac{i}{D}[\varpi\frac{\partial(\varpi W)}{\partial R} - \frac{2\Omega m}{R}\varpi W] = \frac{i}{D}[\varpi^2\frac{\partial W}{\partial R} - (\Omega' - \frac{2\Omega m}{R})m\varpi W]$

$\delta v_\phi = \frac{1}{D}[\frac{\kappa^2}{2\Omega}\frac{\partial(\varpi W)}{\partial R} - \frac{m\varpi^2}{R}W] = \frac{1}{D}[\frac{\kappa^2}{2\Omega}(\varpi\frac{\partial W}{\partial R} - m\Omega' W) - \frac{m\varpi^2}{R}W]$

$\delta v_Z = -i\frac{\partial W}{\partial Z}$

3)Substitution :

On remplace l'expression de $\vec{\delta v}$ dans l'équation de conservation de la masse :

$$-i\varpi\delta\rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{\delta v}) = 0 \text{ avec } \delta\rho = \frac{\rho\delta P}{\gamma P} = \frac{\rho^2 H}{\gamma P}$$

$$-i\varpi\frac{\rho^2 H}{\gamma P} + \frac{1}{R}\frac{\partial(R\rho\delta v_R)}{\partial R} + \frac{im}{R}\rho\delta v_\phi + \frac{\partial(\rho\delta v_Z)}{\partial Z} = 0$$

On obtient ainsi une équation présente dans tous les articles (sous des formes différentes) :

$$-\frac{\varpi\rho^2\delta\Phi}{\gamma P} - \frac{\rho^2\varpi^2 W}{\gamma P} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\rho\frac{1}{D}[\varpi^2\frac{\partial W}{\partial R} - (\Omega' - \frac{2\Omega m}{R})m\varpi W])$$

$$+\frac{m\rho}{RD}[\frac{\kappa^2}{2\Omega}(\varpi\frac{\partial W}{\partial R} - m\Omega' W) - \frac{m\varpi^2}{R}W] - \frac{\partial}{\partial Z}\rho\frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \,(\text{Equation } (*))$$